DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2007.04.002
第 35 卷 第 4 期 2007 年 11 月
河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University (Natural Science)
Vol.35 No.4 Nov. 2007
文章编号:1000-2367(2007)04-0013-02

关于 Smarandache 完全数

乐茂华

(湛江师范学院 数学系, 广东 湛江 524048)

摘　要:对于正整数 a, 设 $S(a)$ 是 a 的 Smarandache 函数, 设 n 是正整数. 如果 n 满足 $\sum_{d|n} S(d) = n+1+S(n)$, 则称 n 是一个 Smarandache 完全数. 本文证明了: Smarandache 完全数仅有 $n=12$.

关键词: Smarandache 函数; Smarandache 完全数; 存在性
中图分类号: O156　　文献标识码: A

设 **N** 是全体正整数的集合. 对于正整数 a, 设

$$S(a) = \min\{k \mid k \in \mathbf{N}, a \mid k!\}. \tag{1}$$

如此的 $S(a)$ 称为 a 的 Smarandache 函数. 设 n 是正整数. 如果 n 的不同约数之和等于 $2n$, 则称 n 是完全数. 长期以来, 完全数一直是数论中的一个引人关注的问题[1]. 最近, Ashbacher[2] 将完全数的概念推广到了 Smarandache 函数范围, 将满足

$$\sum_{d|n} S(d) = n + 1 + S(n) \tag{2}$$

的正整数 n 称为 Smarandache 完全数. 对此, Ashbacher 证明了: 当 $n \leq 10^6$ 时, 仅有 Smarandache 完全数 12. 本文完整地解决了 Smarandache 完全数问题, 即证明了:

定理 1　仅有 Smarandache 完全数 12.

1　若干引理

引理 1　如果

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \tag{3}$$

是正整数 n 的标准分解式, 则

$$s(n) = \max(S(p_1^{r_1}), S(p_2^{r_2}), \cdots, S(p_k^{r_k})). \tag{4}$$

证明　参见文献[3].

引理 2　对于素数 p 和正整数 r, 必有 $S(p^r) \leq pr$.

证明　参见文献[3].

引理 3　对于正整数 n, 设 $d(n)$ 是 n 的除数函数. 此时, $d(n)$ 是积性函数; 当(3)是 n 的标准分解式,

$$d(n) = (r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1). \tag{5}$$

证明　参见文献[4]中的例 6.4.2.

引理 4　不等式

$$\frac{n}{d(n)} < 2, n \in \mathbf{N} \tag{6}$$

仅有解 $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

收稿日期: 2006-11-15
基金项目: 国家自然科学基金(10271104); 广东省自然科学基金(04011425)
作者简介: 乐茂华(1952-), 男, 上海市人, 湛江师范学院教授, 主要从事数论方面的研究.

2 定理 1 的证明

设 n 是适合 $n\neq 12$ 的 Smarandache 完全数. 根据文献[2] 中的结果可知 $n>10^6$. 设(3)是 n 的标准分解式. 根据引理 1 可知

$$S(n)=S(p^r), \tag{7}$$

其中

$$p=p_j, r=r_j, 1\leq j\leq k. \tag{8}$$

从(7)可知

$$n\mid S(p^r)!, \tag{9}$$

所以对于 n 的任何约数 d 都有

$$S(d)\leq S(p^r). \tag{10}$$

对于正整数 n, 设

$$g(n)=\sum_{d\mid n}S(d). \tag{11}$$

此时, 从(2)和(11)可知 n 适合

$$g(n)=n+1+S(n). \tag{12}$$

又设 $d(n)$是 n 的除数函数. 从(10)和(12)可得

$$d(n)S(p^r)>n. \tag{13}$$

由于从(3)和(7)可知 $\gcd(p^r, n/p^r)=1$, 所以

$$n=p^r m, m\in \mathbf{N}, \gcd(p^r, m)=1. \tag{14}$$

又从引理 3 可知 $d(n)$是积性函数, 故从(14)可得

$$d(n)=d(p^r)d(m)=(r+1)d(m). \tag{15}$$

将(14)和(15)代入(13)即得

$$\frac{(r+1)S(p^r)}{p^r}>3\frac{m}{d(m)}. \tag{16}$$

设 $f(n)=n/d(n)$. 此时(16)可写成

$$\frac{(r+1)S(p^r)}{p^r}>f(m). \tag{17}$$

于是, 根据引理 2 和引理 4, 从(17)可知: 仅有 Smarandache 完全数 12. 定理 1 证毕.

参 考 文 献

[1] Guy R K. Unsolved problems in number theory[M]. New York: Springer Verlag, 1981: 25—56.

[2] Ashbacher C. On numbers that are pseudo-Smarandache and Smarandache perfect[J]. Smarandache Notions J, 2004, 15: 40—42.

[3] Farris M, Mitchell P. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions J, 2002, 13: 37—42.

[4] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 121—123.

On the Smarandache Perfect Numbers

LE Mao-hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, China)

Abstract: For any positive integer a, let $S(a)$ denote the Smarandache function of a. Let n be a positive integer. If n satisfies $\sum_{d\mid n}S(d)=n+1+S(n)$, then n is called a Smarandache perfect number. In this paper we prove that 12 the only Smarandache prefect number.

Key words: Smarandache function; Smarandache perfect number; existence